Brief Note On String

Leonard Wang

2025 年 6 月 3 日

目录

1 引言 **1**

2 Action and EOM **3**

2.1 相对论性点粒子作用量 3

2.1.1 点粒子作用量以及推广 4

2.2 Nambu Goto 作用量 4

2.3 Polyakov 作用量 5

2.4 规范固定 7

2.5 作用量中的拓扑项 * 8

2.6 运动方程 9

3 Conformal Sym and Quantization **13**

3.1 没有固定的自由度 13

3.1.1 Killing 方程 13

3.1.2 2D Killing 方程 14

3.2 光锥规范固定冗余 15

3.2.1 真正的自由度 15

3.3 量子化简介 16

3.4 弦的激发 18

3.4.1 开弦质量谱 18

3.4.2 闭弦质量谱 19

3.5 玻色弦的不完备性以及超弦理论 20

A Appendix.1 **25**

Chapter 1

引言

这里是作者在 FUSEP 学习 AdS/CFT 前进行的弦论相关的初步学习，内容包括玻色弦从作用量到能谱的若干讨论。主要参考讲义 [2] 并参考多方文献着重讨论一些概念的理解，本文不含完备的证明以及推导，由于参考文献已经详细给出。对于一些符号和 notation 可能存在一些混用，后续会陆续修改和更新。请读者多多包涵！

——

Chapter 2

Action and EOM

2.1 相对论性点粒子作用量

讨论相对论性的物理需要得到一套洛伦兹不变的标量作用量。对于点粒子而言，最简单的满足要求的形式是世界线长度。

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}}} \tag{2.1}$$

可惜，我们对描述形式并不洛伦兹协变。我们尝试着将 t 提升为动力学变量。

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}} \tag{2.2}$$

$$S = -m \int d\tilde{\tau} \sqrt{-\frac{dX^\mu}{d\tilde{\tau}} \frac{dX^\nu}{d\tilde{\tau}} \eta_{\mu\nu}} \tag{2.3}$$

这里 X 是粒子在 $\mu = 0, \cdot., D-1$ 的时空中的坐标，τ 是以世界线长度参数。由于引入了额外的动力学变量的缘故，额外的自由度带来的是对称性。我们发现将 $\tau \Rightarrow \tilde{\tau}$ 作用量形式不变。我们将 τ 的重参数化视作一种冗余的描述，具体体现在 on-shell 的物理量比如 p_μ 并不依赖重参数模式的选取。

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{m \dot{X}^\nu \eta_{\mu\nu}}{\sqrt{-\dot{X}^\lambda \dot{X}^\rho \eta_{\lambda\rho}}}$$

我们在后续的讨论也会看到对称性会带来冗余的描述，这是我们会讨论作用量层面规范固定的源头。

2.1.1 点粒子作用量以及推广

如果将相对论性点粒子作用量设定为世界线的长度，那么可以通过求解运动方程得到自由相对论性粒子的运动方程。

$$S = -m \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu} \tag{2.4}$$

其中，m 是粒子的质量，τ 是世界线的参数，$\dot{X}^\mu$ 表示 X^μ 对 τ 的导数。对 X^μ 进行变分，我们得到：

$$\frac{\delta S}{\delta X^\mu} = -m \int d\tau \frac{\ddot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\nu \dot{X}_\nu}} = 0 \tag{2.5}$$

这可以得到自由粒子的运动方程，也就是牛顿第一定律。

$$\ddot{X}_\mu = 0 \tag{2.6}$$

试想一下，如果我们讨论的单元不再是一个粒子，而是一根线。那么最直白的推广形式是就是 Nambo Goto 作用量 S_{NG}：描述物体 (弦) 在时空中运动的世界面。我们可以继续试着推广到更高维度的物体，我们最终会得到 Brane 的描述以及对应的 Dirac Born Infeld Action。但这就太多了，我们先研究弦理论的基本内容。

2.2 Nambu Goto 作用量

在介绍 Nambu Goto 作用量之前，我们需要了解一些符号和意义。具体的定义给定如下：

- σ, τ：弦作为只有一个空间维度的连续物体，可以只由一个参数 σ 刻画；而弦在时空中的运动需要引入时间参数 τ。
- X^μ：弦在背景时空流形中运动，把时空流形视作“背景”。用数学语言表述就是一维弦运动形成的二维世界面在背景时空流形中的嵌入。而 X^μ 描述的就是各个背景时空分量的嵌入方式。

- $h_{ab} \equiv \eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$：这里 $\eta_{\mu\nu}$ 描述的是背景时空的度规，h_{ab} 称为诱导度规，描述的是世界面这个二维流形上的度规：

$$ds^2_{\text{induce}} = h_{ab}(\sigma,\tau)d\sigma^a d\sigma^b. \tag{2.7}$$

- α'：被称作弦参数。有面积的量纲。定义 $\alpha' \equiv l_s^2$ 定义弦的特征长度 l_s

- $T \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}$：这个量称作弦张力 (string tension)。将我们后续讨论的 Nambu Goto 作用量按照 h_{ab} 代入展开到一阶项，可以得到：

$$\mathcal{L}_{NG} = -T + \frac{T}{2}\left((\partial_0 X^i)^2 - (\partial_1 X^i)^2\right) + \mathcal{O}(...) \tag{2.8}$$

  所以如果弦是静止的话，勒让德变换告诉我们哈密顿密度 $\mathcal{H} = -\mathcal{L} = T$. 我们得到 T 的物理含义就是为单位长度的弦本身具有的能量。所以 T 又叫做 string tension。对于一阶项，括号内相差一个负号表明弦的振动以光速传播。

由我们上面讨论中作用量 = 世界面的面积为基准出发，我们得到一个自然的刻画世界面面积的作用量如下

$$S_{NG} = T\int d^2\sigma\ \sqrt{-\det(h)} \tag{2.9}$$

为了能在路径积分中处理该作用量的动力学，我们要改变上面根式形式的作用量，我们期望得到二次型的作用量。而这一系列操作将让我们得到著名的 **Polyakov** 作用量。

2.3 Polyakov 作用量

如果世界面上还存在一个额外的张量场 $\gamma_{\alpha\beta}$，我们可以观察到如下作用量是一个多项式型的作用量在世界面 Σ 上的积分。

$$\boxed{S_{poly} = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu\,\eta_{\mu\nu}} \tag{2.10}$$

可以证明该作用量与 NG 作用量的运动方程等同，而且有多种不同方式。这里阐述两种证明思路，具体证明步骤见讲义。

证明思路 1：直接证明

参考 Prof. Liu Hong, 2014 Fall, Lecture 10 [2]。对 Polyakov 作用量里的度规进行变分，可以得到

$$\gamma^{ab} = B(\sigma, \tau) h^{ab},$$

然后利用 Polyakov 作用量的共形对称性（Conformal Symmetry），化简后原式即为 Nambu-Goto (NG) 作用量。

证明思路 2：从运动方程角度出发

参考 David Tong, *String Theory*, Chapter 2 [4]。证明二者都满足运动方程

$$\partial_\alpha(\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu) = 0. \tag{2.11}$$

由于运动方程（EOM）是 on-shell 的物理量，因此只要 EOM 相同，两个物理理论即可视为等价。Prof Tong 更严格的论述了这件事，他提到了**表示独立性定理**（Representation Independence Theorem）：

> *If different theories are related by field redefinitions that preserve symmetries and have the same 1-particle states, then the results of observables in spacetime of these theories should agree (although the off-shell process might be different, the on-shell calculations are the same, order by order).*

目前我们仅在经典场论层面证明了 S_{NG} 与 S_P 的等价性，但无法且也不会得到它们在量子层面的等价性。

Polyakov 作用量的几何解释

从数学形式上看，γ_{ab} 的作用类似于拉格朗日乘子。因此，在描述真实的物理现象时，我们不仅需要让 X^μ 满足 on-shell 条件，还需要让 γ_{ab} 也满足 on-shell 条件，但这并不直观。

从几何角度来看，有一个更直观的解释：γ_{ab} 是一个定义在世界面上的度规场。表达式 $\gamma^{ab}\partial_a X \partial_b X$ 描述了这个 **度规场**如何嵌入到 **世界面**中。需要注意的是，这与 $\eta_{\mu\nu}\partial X^\mu \partial X^\nu$ 表示有所不同，后者描述的是 **世界面**如何嵌入到 **背景时空**中。

2.4 规范固定

我们形式上确实得到我们想要的多项式型作用量，但在该过程中引入了额外的场，以及在我们构造的作用量会出现对称性。我们要付出的代价是引入对新的场的 (Constraints)。

Polyakov 作用量的对称性

由于 Polyakov 作用量中存在两对缩并指标的结构：

$$\gamma^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}, \tag{2.12}$$

这意味着存在两个明显的对称性：全局的 Poincaré 对称性和局部微分同胚对称性。关于微分同胚对称性的详细内容，可以参考 David Tong 在其讲义中的精彩论述 [4]。但这里更重要的，是存在 **Weyl 对称性**。

由于 Polyakov 作用量中存在该结构，

$$\int d^2\sigma\sqrt{-\gamma}\gamma^{\alpha\beta} \tag{2.13}$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(\sigma) \to \Omega^2(\sigma)\gamma_{\alpha\beta}(\sigma) \tag{2.14}$$

考虑张量场 γ 的共形变换，可以发现共形因子可以相互抵消。这预示着**二维**世界面可以保证 Weyl 对称性。从更符合物理直觉的角度看：变换前后的 $\gamma_{ab}, \tilde{\gamma}_{ab}$ 有相同的运动方程，描述的是同一个物理态，所以理论上我们可以任意的选取 $\Omega(\sigma)$，而这就涉及到规范固定的问题。

度规场 γ_{ab} 的对称性

不仅作用量本身存在 wely 对称性，度规场 γ_{ab} 也存在对称性。我们考虑任意张量场 γ_{ab}

$$\gamma_{ab} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

$$ds^2 = ad\sigma^2 + 2bd\sigma d\tau + cd\tau^2. \tag{2.16}$$

通过组合 τ, σ 坐标，可以将度规转换为：

$$\gamma_{\alpha\beta} = e^{2\phi}\eta^{\text{flat}}_{\alpha\beta}. \tag{2.17}$$

世界面的光锥坐标：实际上我们使用世界面光锥坐标更容易看到这种对称性：

$$\sigma^{\pm} = \frac{\tau \pm \sigma}{\sqrt{2}}, \quad ds^2 = -2d\sigma^+ d\sigma^- \tag{2.18}$$

考虑变换

$$\sigma^+ \to \tilde{\sigma}^+ = f(\sigma^+), \quad \sigma^- \to \tilde{\sigma}^- = g(\sigma^-) \tag{2.19}$$

可以发现度规变换只改变一个 Weyl 因子

$$ds^2 \to -2\partial_+ f \partial_- g \, d\sigma^+ d\sigma^- \tag{2.20}$$

Theorem：

We can use Weyl invariance to make any two-dimensional metric flat.

共形规范

由于我们关注的 Polyakov 作用量含有哦 Weyl 对称性，因此我们总可以将度规场 γ_{ab} 设置为局域平坦的。于是，作用量可以写为：

$$\boxed{S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \, \partial_\alpha X \cdot \partial^\alpha X} \tag{2.21}$$

共形规范的 Polyakov 作用量有一个很简单的物理阐述：这实际上是 D 个自由标量场的拉格朗日量，其中 D 是时空的维数。

2.5 作用量中的拓扑项 *

在分析 Polyakov 作用量的对称性时，我们发现有三种对称性：Poincaré + Diff + Weyl。因此，在对作用量进行修改时，如果不破坏这三种对称性，则认为理论在经典层面上是一致的。在这里只是简单的讨论引入该项修正后与原理论的差异。

在 AdS/CFT 的讨论中我们会遇到作用量中的拓扑项，i.e 在 Polyakov 作用量中引入 R, K，分别对应于里奇标量和外曲率。

$$\lambda \left(\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-\gamma} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} ds K \right) \subseteq S$$

增加的拓扑项没有世界面和背景时空指标，因此满足 Poincaré + Diff 对称性。因此，当考察弦论的局部性质或者世界面具有平凡的拓扑时，我们

不需要考虑这些额外项。然而，当世界面的拓扑不平凡时，这些项的存在将带来显著的特点。我们将证明拓扑项满足 Weyl 对称性。

关于 Weyl 变换下原作用量不变的证明

定义：我们讨论 2D 可定向曲面，其中 K 代表边界 Σ 的外曲率，$K = \pm t^a n_b \nabla_a t^b$，其中 $t \perp n$，正负号取决于边界是类空还是类时。

在 Weyl 变换 $\gamma_{ab} \to e^{2\omega}\gamma_{ab}$ 下，

$$\begin{cases} R & \to e^{-2\omega}(R - 2\nabla_a \partial^a \omega) \\ t & \to e^{-\omega} t \\ n_a & \to e^{\omega} n_a \end{cases}$$

于是外曲率项变成

$$K \to e^{-\omega}(K \mp t^a t_a n^b \partial_b \omega) = e^{-\omega}(K + n^a \partial_a \omega)$$

因此，S_χ 在 Weyl 变换下变为

$$S_\chi \to \lambda \left(\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-\gamma}(R - 2\nabla_a \partial^a \omega) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} ds (K + n^a \partial_a \omega) \right)$$

利用斯托克斯定理

$$\int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \nabla_a \partial^a \omega = \int_{\partial\Sigma} ds n^a \partial_a \omega$$

可知 S_χ 在 Weyl 变换下不变，保留了 Weyl 对称性。

拓扑项贡献与开弦和闭弦相互作用的顶点的关系见 A论述

2.6 运动方程

得到这么简单的作用量，我们下一步研究这个理论运动方程。但是需要注意，我们需要对原始的 Polyakov 作用量 2.10进行讨论。

Constraints

对于 γ_{ab} 进行变分，我们将得到一组方程称之为约束 (Constraints)。而该限制的物理解释是限制了能量动量张量的形式。

从被动观点来看度规场的变换就是坐标变换:

$$\delta\gamma_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \epsilon_\beta + \partial_\beta \epsilon_\alpha$$

所以相应的作用量变换对应于

$$\delta S = -\int d^2\sigma \, \frac{\partial S}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} \, \delta\gamma_{\alpha\beta} = -2\int d^2\sigma \, \frac{\partial S}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} \, \partial_\alpha \epsilon_\beta$$

量子场论告诉我们能动张量正好对应于 Poincare sym 的守恒流。由于上面的微分同胚变换在世界面上进行，所以这里 $\frac{\delta S}{\delta \gamma_{\alpha\beta}}$ 将带给我们世界面上的能动张量。所以我们有如下结果：

$$\frac{-4\pi}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta S}{\delta \gamma^{ab}} \equiv T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2}\gamma_{ab}\gamma^{cd}\partial_c X^\mu \partial_d X_\mu = 0 \tag{2.22}$$

$$T_{10} = T_{01} = \boxed{\dot{X} \cdot X' = 0} \tag{2.23}$$

$$T_{00} = T_{11} = \boxed{\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0} \tag{2.24}$$

Remark:

- $\dot{X} \cdot X' = 0$, 该约束条件存在一个直观的几何解释：世界面上等 σ 线与等 τ 线相互垂直。
- $T_{ab} = 0$, 从另一个角度来看该约束条件源自二维没有非平凡的爱因斯坦引力。世界面中不仅存在弦这个” 物质”，还存在” 时空/引力”，也就是认为世界面的时空几何由度规 γ_{ab} 决定。完整的作用量需要引入 R 来描述该世界面的几何。由于二维没有非平凡的爱因斯坦引力，所以爱因斯坦方程中 $G_{ab} = 0$

$$0 = G_{ab} = T_{ab}$$

X^μ 的 EOM

对于 X^μ 我们可以很容易得到 EOM，如前论述 2.11。

$$\partial_a(\sqrt{-\gamma}\gamma^{ab}\partial_b X^\mu) = 0 \tag{2.25}$$

容易发现该 EOM 也存在 Weyl 对称性。利用我们得到的 2.4中的定理，我们可以使用共形规范化简表达式：

$$\partial_a \partial^a X^\mu = 0 \tag{2.26}$$

切换到世界面的光锥坐标后形式会更加简洁 2.4

EOM

$$\boxed{\partial_+ \partial_- X^\mu = 0} \tag{2.27}$$

可以发现解必须符合如下形式。并且代入 Constraints 可以极大的简化形式。

$$X^\mu(\sigma, \tau) = X_L^\mu(\sigma^+) + X_R^\mu(\sigma^-) \tag{2.28}$$

Constraints

$$\boxed{(\partial_+ X)^2 = (\partial_- X)^2 = 0} \tag{2.29}$$

Chapter 3

Conformal Sym and Quantization

3.1 没有固定的自由度

在量子化之前我们需要先固定所有的规范，否则会出现异常。在找到真正独立的动力学变量后我们再进行量子化。到目前为止我们对规范固定的讨论如下：我们分别用了世界面坐标的微分同胚变换以及 Weyl 对称性使得 $\gamma_{ab} \to \eta_{ab}$。

但是，其实还有一种对称性没有被完全固定，即微分同胚变换和 Weyl 对称性的联合对称变换。描述这一类的对称变换我们需要用到 Killing 方程。

3.1.1 Killing 方程

微分同胚对称性

$x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu$ 对应的度规变换

$$g'_{\mu\nu}(x^\mu + \epsilon^\mu) = g_{\mu\nu} + (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) g_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

于是度规的变换记作

$$\delta g_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu \tag{3.2}$$

Weyl 对称性

$$g_{\mu\nu} \to \Omega(x) g_{\mu\nu} \tag{3.3}$$

相应 Weyl 对称性带来的度规变换记作

$$\delta g_{\mu\nu} = (\Omega(x) - 1) g_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

如前所述，我们研究的是 Weyl 变换与无穷小同胚变换下保持 Isometry（等度规变换）的一类变换，数学表达如下：

$$(\Omega(x) - 1) g_{\mu\nu} = \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu \tag{3.5}$$

可以用 $g^{\mu\nu}$ 消去指标得到 $\Omega(x)$ 表达式，代回可以得到对应的 Killing 方程：

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) g_{\mu\nu} \tag{3.6}$$

求解 Killing 方程可以得到该共形变换的无穷小变换参数以及相应的生成元 (这里只引用任结果)：

$$\begin{cases} \epsilon^\mu = a^\mu \\ \epsilon^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \\ \epsilon^\mu = \lambda x^\nu \\ \epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b \cdot x \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} P_\mu = \partial_\mu, \\ M_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \\ D_\mu = x^\mu \partial_\mu, \\ k_\mu = x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu. \end{cases} \tag{3.8}$$

3.1.2 2D Killing 方程

对于二维空间具有微分同胚对称性也有 Weyl 对称性的理论来说，我们可以得到二维共形 Killing 方程如下。（注意，我们的度规采用欧式号差，也就是局部上 $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$）

$$\begin{cases} \partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2 \\ \partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1 \end{cases} \tag{3.9}$$

可以观察到这就是二维平面的 Cauchy-Riemann 条件。为了方便定义复坐标 $z, \bar{z} = x^0 \pm i x^1$，所以二维共形变换可以用全纯和反全纯函数表示如下：

$$\begin{cases} z \mapsto f(z) \\ \bar{z} \mapsto \bar{f}(\bar{z}) \end{cases} \tag{3.10}$$

3.2 光锥规范固定冗余

对于我们讨论的二维平面，更习惯用 σ（而不是 x）表示坐标。从上面讨论知道共形对称性可以将 σ^- 进行任意反全纯变换：

$$\sigma^- \to \tilde{\sigma}^- = \bar{f}(\sigma^-) \tag{3.11}$$

容易发现

$$\partial_+\partial_-\bar{f}(\sigma^-) = 0 \tag{3.12}$$

我们之前的公式 2.27 告诉我们所有的 X^μ 满足运动方程

$$\partial_+\partial_- X^\mu = 0 \tag{3.13}$$

我们取规范固定，可以发现满足运动方以及对称性要求：

$$\tau = \frac{X^+}{v^+} \tag{3.14}$$

(其中 $X^\pm = \frac{X^0 \pm X^1}{\sqrt{2}}$ 对应度规 $dX^\mu dX_\mu = -2dX^+dX^- + dX^i dX^i$)

使用光锥坐标系并加入 conformal gauge，我们可以重新描述 Constraints：

$$T_{ab} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2v^+\partial_\tau X^- &= (\partial_\tau X^i)^2 + (\partial_\sigma X^i)^2 \\ v^+\partial_\sigma X^- &= \partial_\tau X^i \partial_\sigma X^i \end{cases} \tag{3.15}$$

3.2.1 真正的自由度

在这些花里胡哨的操作之后我们该研究这个体系真正的自由度是什么了。

- 我们可以看到 X^+ 完全由规范固定而确定下来，所以不是真正独立的自由度。
- 而 X^- 在相差常数项下可以完全由 v^+, X^i 决定。
- 所以我们可以看出在 Constraint 下真正的动力学变量是 X^i 以及 x^-（上面提到的积分常数因子）v^+。
- 动量空间本征态下自由度只由 $X^i, i \in \{1, ..., D-2\}$。(该结果在后续讨论玻色弦自洽的时空维度时会有重要的应用)

3.3 量子化简介

这里只是简单的概述光锥量子化方案。光锥量子化在所有的教科书中都会详细的讨论。所以本节仅仅梳理脉络，并不会涉及细节内容。

至于更多的 Covariant Quantization 可以参考 [1] 关于 Path Integral Quantization 可以参考 [3]. 一些简单的介绍可以参考 [5] 以及 [6]。。

大体思路

大体思路如下：由于先是一个 1 维物体，不同于 QFT 中 0 维粒子直接进行模式展开，我们要在给定边界条件后进行模式展开。对应于**开弦/闭弦**。随后将模式系数提升为算符即可得到量子化的理论。

a. 周期性边界条件以及模式展开

略，见任何一本参考书。

b. 正则变量

- 正则量子化中要将正则变量添加对易关系，从而得到各个模式算符的对易关系。

- $\Pi_a^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'}\partial_a X^\mu$ 是正则动量。对弦体积积分，也就是 $\int d\sigma \Pi^\mu$ 得到总动量 p^μ。由于周期性条件导致只有 ν^μ 项有贡献，所以我么可以得到 ν^μ 的物理诠释
$$p^\mu = \frac{l}{2\pi}\frac{v^\mu}{\alpha'} \tag{3.16}$$

c. Constraints

- 对于开弦,Constraints 得到平凡的结论。

- 对于闭弦，Constraints 将带给我们 level matching condition：
$$\sum_{n\neq 0}\alpha^i_{-n}\alpha^i_n = \sum_{n\neq 0}\tilde{\alpha}^i_{-n}\tilde{\alpha}^i_n \tag{3.17}$$

d. EOM

- 闭弦：

$$2v^+v^- = v_i^2 + \alpha' \sum_{n\neq 0} \left(\alpha_{-n}^i \alpha_n^i + \tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_n^i\right) \tag{3.18}$$

- 开弦：

$$2v^+v^- = v_i^2 + 2\alpha' \sum_{n\neq 0} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i \tag{3.19}$$

e. 正规序

如果我们要考察这个量

$$\sum_{n\neq 0} (\alpha_{-n}^i \alpha_n^i) \tag{3.20}$$

我们如果重新交换求和的次序 i.e $\sum\limits_{-n}$。该操作等效于调换算符 α:

$$\alpha_{-n} \leftrightarrow \alpha_n$$

一方面：我们知道求和并不依赖于求和顺序。**另一方面**：我们知道量子化后 α 算符的交换会带来非平凡的结果 (该内容请详见任何一本弦论书):

$$[\alpha_n^i, \alpha_m^j] = [\tilde{\alpha}_n^i, \tilde{\alpha}_m^j] = m\delta^{ij}\delta_{n+m,0} \tag{3.21}$$

所以我们要在正规排序下讨论 3.20 才是良定义的。

f. 弦常数

我们之前只是在 2.2中给出了 α 的形式，利用 $\zeta(-1)$ 函数的解析性以及代入相应系数

$$a_c = -\frac{D-2}{6\alpha'} \tag{closed}$$

$$a_o = -\frac{D-2}{24\alpha'} \tag{open}$$

该套量子化路程不仅可以让我们写下的玻色弦的质量谱。这套流程可以更广泛的推广到其他弦论的质量谱，比如 $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z}_2$orbifold 的质量谱 [6]。

这一块内容本来是作者的随笔，放在这里缺乏良好的描述，待作者有空的时候后续会做详细补充……

3.4 弦的激发

弦论可以作为大一统理论的候选人的重要性质是能描述已知各种各样的场:spin-$0, 1/2, 1$ ... 。深入了解这些场的秘密就在弦的激发谱里面。

弦的激发谱：如果弦是 on-shell 的，那么我们得到弦的动量与振动模式有关, 从而得到弦的谱。

弦激发的场：不同的激发态有不同的洛伦兹指标 (μ, ν)，所以在洛伦兹变换下有不同的性质，这些激发态便描述了弦激发的场。

因此，我们分析弦的谱就可以讨论弦的激发态，最终得到弦论描述的场的性质。(含有部分没有在本文详细的论述，遗失内容可以参考 [2])

弦的运动方程以及自由度的讨论中我们知道动量空间出了 α_i^μ 系数，还有 ν^μ 决定。所以弦的基态一种最自然的表示是 $|0, p^\mu\rangle$。其中 p^μ 代表弦的质心动量，而相应的激发态由模式展开到 α_i^μ 作用于基态得到。通过 Virasoro 代数等数学讨论可以得到弦的质量谱。(参考 [4] 给出详细计算细节)

3.4.1 开弦质量谱

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{i=2}^{D-1} \sum_{n \neq 0} n N_n^i - \frac{D-2}{24\alpha'} \tag{3.22}$$

- Ground State: $|0, p^\mu\rangle$

  质量：$M^2 = -\frac{D-2}{24\alpha'}$，如果背景时空维数 $D > 2$，我们将得到一个负质量的基态，叫做 Tachyon，更多内容见 [*tachyon*]。

- First Excited State: $\alpha_{-1}^i |0, p^i\rangle$

  质量：$M^2 = \frac{26-D}{24\alpha'}$。

- Second Excited State：$\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}' |0, p^\mu\rangle$ 或者 $\alpha_{-2}^i |0, p^\mu\rangle$

  质量：$M^2 = \frac{2}{\alpha'} + \frac{26-D}{24\alpha'}$。

玻色弦的时空自洽维度 =26

1. Claim：D 维空间有质量的矢量玻色子的 DoF 是 $D-1$，对应的不可约群表示是对应的李群是 $SO(D-1)$；无质量的矢量玻色子是 Dof 是 $D-2$，对应的不可约群表示李群是 $SO(D-2)$。

2. 光锥量子化后，我们的第一激发态 $\alpha'^I|0,p\rangle$ 中指标 I 的取值只能是 $D-2$ 个坐标 (不含有指标 $\pm$)。这个激发态在洛伦兹变换下表现得像矢量粒子，但是原先 $(D-1,1)$ 维时空的对称群 $SO(D-1,1)$ 破缺成 $SO(D-2)$。

3. Hilbert space 中的粒子态满足相应的代数，也就是说粒子态应当满足 Wigner 定理。我们通过质量谱的分析发现 $D=26$ 可以让第一激发态质量为 0。wigner 定理预言的该粒子的 Dof 与我们选择的光锥规范描述一致。因此，开弦的最低激发态是无质量矢量粒子–高维空间的光子

Remarks:

有质量引力子

对于第二激发态，一个指标的态有 24 个 DoF; 再考虑两个指标态有 $\frac{24\times25}{2}$ 个 DoF。总共 324 个 DoF，对应 $SO(25)$ 对称的无迹二阶张量。第二激发态可作为 $D=26$ 的有质量引力子的不可约表示。

质量分布

$\Delta M^2=\frac{1}{\alpha'}$，质量平方以 $\frac{1}{\alpha'}$ 等间距分布。

3.4.2 闭弦质量谱

相比于开弦，为了满足约束条件，闭弦的讨论需要有 level matching 条件，也就是 $N=\tilde{N}$。这里考虑背景时空维数为 $D=26$

$$M^2=\frac{2}{\alpha'}\sum_{i=2}^{D-1}\sum_{n\pm6}n(N_n^i+\tilde{N}_n^i)-\frac{D-2}{6\alpha'} \tag{3.23}$$

- Ground State：$|0,p^\mu\rangle$

  质量–$M^2=-\frac{D-2}{6\alpha'}$。

- First Excited State：$\alpha_{-1}^i\tilde{\alpha}_{-1}^j|0,p^\mu\rangle$

  质量–$M^2=\frac{26-D}{6\alpha'}$。

- Second Excited State：

$$\begin{cases}\alpha_{-1}^i\alpha_{-1}^j\tilde{\alpha}_{-1}^k\tilde{\alpha}_{-1}^l|0,p^\mu\rangle\\ \alpha_{-2}^i\tilde{\alpha}_{-1}^k\tilde{\alpha}_{-1}^l|0,p^\mu\rangle\\ \alpha_{-1}^i\alpha_{-1}^j\tilde{\alpha}_{-2}^k|0,p^\mu\rangle\end{cases} \tag{3.24}$$

质量–$M^2 = \frac{4}{\alpha'}$。

Remark:

1. 第一激发态在洛伦兹群下的作用下可以分成三种可以分解成三种不可约表示：

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^{\{\mu}\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu\}}\left|0\right\rangle \\ \alpha_{-1}^{[\mu}\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu]}\left|0\right\rangle \\ \alpha_{-1}^{\mu}\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu}\left|0\right\rangle \end{cases} \tag{3.25}$$

   分别是 $SO(24)$ 表示下无质量对称无迹的粒子态，无质量反对称无迹的粒子态，还有无质量标量。分别对应的场量描述是度规场，无质量 KALB-RAMOND 场，DILATON 场。**依据下面定理，我们可以认为闭弦的激发自然的囊括了电磁场和引力场的低能描述**。

   Theorem: *Under low energy limits, spin-1 particle is described by Maxwell Field. spin-2 particle is described by Gravity.*

2. 对于闭弦第二激发态，证明同上，形成了 spin-4 粒子的 $SO(25)$ 表示。

3. 从 little group 的角度来看有质量/无质量粒子的表示。对于有质量的粒子，其表示应该写作 $SO(25)$，无质量粒子的表示是 $SO(24)$。粒子态可以通过 $SO(1, D-1)$ 作用于某一类粒子态 (如下所示) 生成。

   - Massive：$\left|E, \underbrace{0, \cdots\cdots, 0}_{25}\right\rangle$
   - Massless：$\left|E, E, \underbrace{0, \cdots\cdots, 0}_{24}\right\rangle$

3.5 玻色弦的不完备性以及超弦理论

玻色弦提供了一个理论具有描述引力，规范场，标量场等一系列可能，但是有一些不能忽视的问题。

1. 开弦闭弦的基态对应的负质量意味着玻色弦论选取的真空并不稳定，我们看到了上面的讨论中基态时负能态。

2. 玻色弦的体系中没有费米子存在的可能

针对后一个问题，我们可以在作用量层面引入费米场。

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d\tau d\sigma\ \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu - \frac{1}{2\pi}\int d\tau d\sigma\ \overline{\Psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \Psi_\mu \tag{3.26}$$

其中，费米部分的作用量写作：

$$\frac{i}{2\pi}\int d\sigma^+ d\sigma^- \left(\psi_+^\mu \partial_- \psi_{+\mu} + \psi_-^\mu \partial_+ \psi_{-\mu}\right) \tag{3.27}$$

然后可以导出左行波和右行波的运动方程（EOM）：

$$\partial_\mp \psi_\pm^\mu = 0 \tag{3.28}$$

更多关于费米部分的讨论不能在本文中更深入的进行了，而且在低能区域，我们只用关注玻色部分的理论。所以讨论到目前程度进入对 AdS/CFT 的简单讨论了。

参考文献

[1] Katrin Becker, Melanie Becker, and John H Schwarz. *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge university press, 2006.

[2] Prof. Hong Liu. Lecture notes | string theory and holographic duality | physics | mit opencourseware. https://ocw.mit.edu/courses/8-821-string-theory-and-holographic-duality-fall-2014/pages/lecture-notes/, 2014. Accessed: 2025-05-24.

[3] Joseph Polchinski. *String theory*. 2005.

[4] David Tong. Lectures on string theory. *arXiv preprint arXiv:0908.0333*, 2009.

[5] Kevin Wray. An introduction to string theory. *Berkeley University*, pages 58–59, 2011.

[6] Barton Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge university press, 2004.

附录 A

Appendix.1

由于 Gauss-Bonnet 定理可以证明该项积分的结果只与流形 Σ 的拓扑性质有关。我们 Claim 如下结果

$$\chi = \lambda \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\gamma} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} ds K \right) = \lambda \cdot \chi(\Sigma) \tag{A.1}$$

这里 $\chi(\Sigma)$ 代表世界面 Σ 上的 Euler Number，其中 genus 数与 boundary 数分别定义为 (g, b)：

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g - b \tag{A.2}$$

物理解释

- **开弦的相互作用：** 一根开弦分开又粘合，对应于两个开弦节点。该过程中世界面多了一个边界，所以每个开弦节点都自然被赋予权重

$$g_o = e^{\lambda/2} \tag{A.3}$$

- **闭弦相互作用：** 一根闭弦的相互作用相当于增加一根把手（也就是多一个亏格），从场论角度对应于两个闭弦节点，于是闭弦节点自然被赋予权重

$$g_c = e^{\lambda} \tag{A.4}$$